LE THÉORÈME DE THALÈS

Introduction

Le théorème de Thalès est l'un des deux grands théorèmes du collège avec le théorème de Pythagore que tu as dû déjà voir 😁

Le théorème (ainsi que la réciproque et la contraposée) vont te permettre de calculer des longueurs et de montrer que des droites sont parallèles (ou non).

Il existe un cas particulier du théorème de Thalès, appelé théorème des milieux, ou plutôt théorèmes des milieux car ce cas particulier regroupe plusieurs théorèmes, que nous verrons à la fin du chapitre car il y a à la fois le théorème et la réciproque.

—

Petit rappel avant de commencer : quand on parle du segment [AB], on met des crochets, quand on parle de la longueur AB, on ne met rien : AB.

Donc si le segment [AB] mesure 4 cm, on écrira AB = 4 cm, mais SURTOUT PAS [AB] = 4 cm.

—

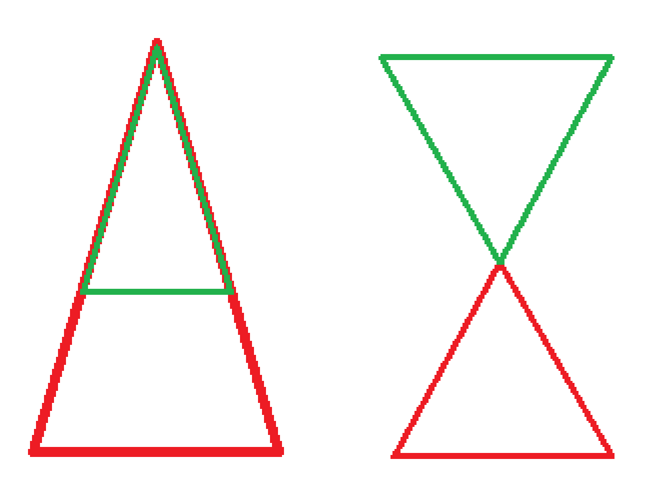
Petite remarque : dans tout l'énoncé on ne mettra pas d'unité aux longueurs, mais évidemment si tu as un énoncé où les longueurs sont en cm par exemple n'oublie pas de mettre l'unité !! 😉

—

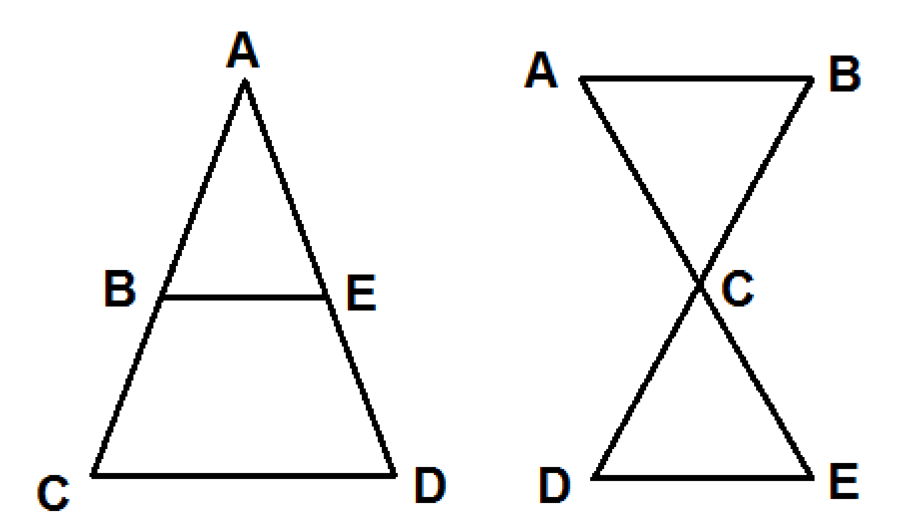
Le théorème de Thalès

Le théorème de Thalès s'applique dans deux configurations distinctes, mais les formules vont être les mêmes.

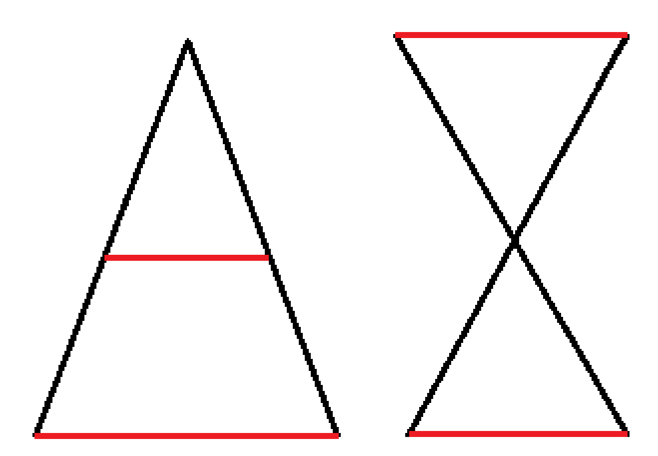
Dans les deux cas, il y a deux triangles (que l'on trace en rouge et en vert dans un premier temps pour bien les distinguer). Ces triangles peuvent être « l'un dans l'autre » ou en forme de papillon :



Sans les couleurs cela donne ça :



Dans les deux cas, ce qui va nous intéresser ce sont deux droites qui doivent être parallèles pour que l'on puisse appliquer le théorème, que l'on a mises en rouge :



1. L'hypothèse principale du théorème est que ces deux droites doivent être parallèles : soit on te le dit dans l'énoncé, soit tu dois le montrer d'une manière ou d'une autre.

2. La deuxième hypothèse du théorème est que l'on soit dans une des deux configurations ci-dessus. Pour justifier cela il suffit de dire que les points de la figure sont alignés dans cet ordre (et évidemment les écrire dans l'ordre de la figure 😉)

Pour la schéma ci-dessus, il faudra donc juste dire « les points A, B, C et A, E, D sont alignés dans cet ordre » pour la première figure, et « les points A, C, E et B, C, D sont alignés dans cet ordre » pour la deuxième figure.

Une fois que l'on a dit ces hypothèses, on dit « d'après le théorème de Thalès », comme on le faisait avec Pythagore.

Et la conclusion est la suivante, il s'agit d'une double égalité :

Pour la première configuration :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{BE}{CD}$$



Pour la deuxième configuration :

$$\frac{CA}{CE} = \frac{CB}{CD} = \frac{AB}{DE}$$

En fait c'est plutôt simple : les numérateurs correspondent aux longueurs d'un des 2 triangles, les dénominateurs correspondent aux côtés de l'autre triangle.
Et peu importe lequel est au-dessus et lequel est en-dessous, l'important est que ce soit les côtés d'un MÊME triangle au-dessus, et de l'autre en-dessous. On aurait donc très bien pu avoir comme double égalité :

Pour la première configuration :

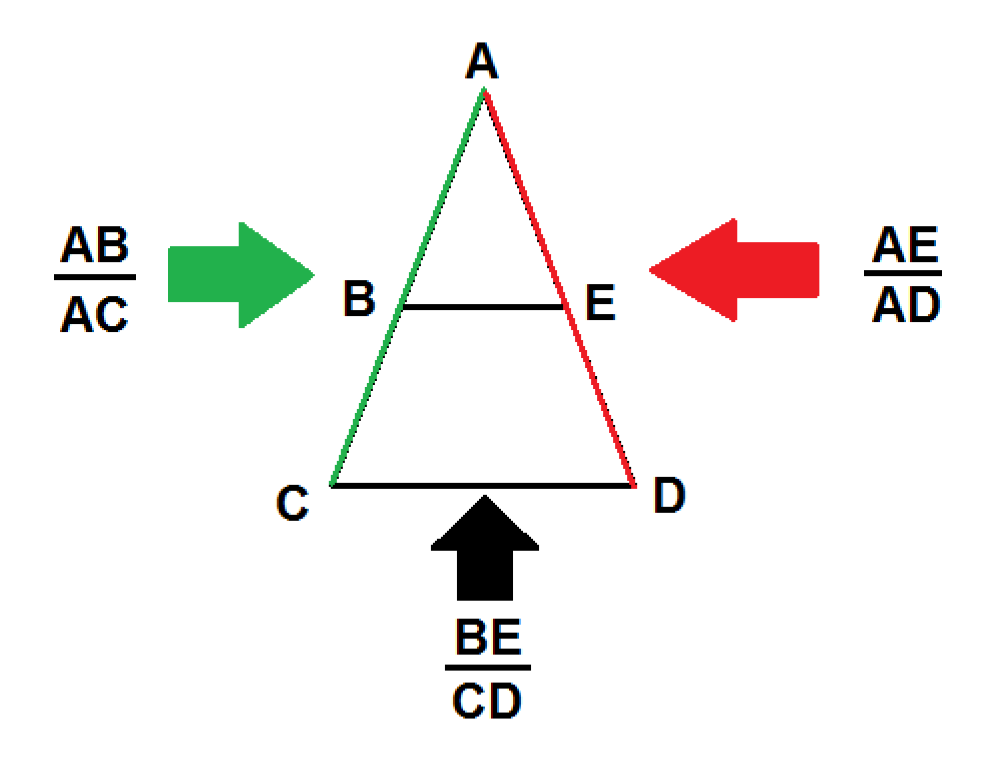
$$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AE} = \frac{CD}{BE}$$

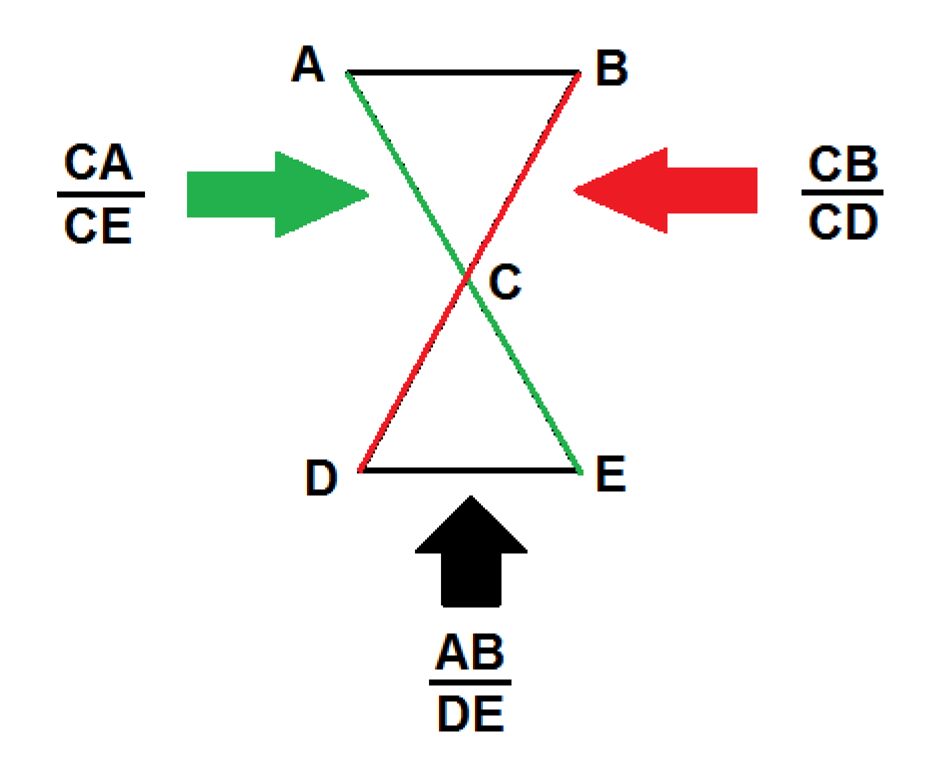
Pour la deuxième configuration :

$$\frac{CE}{CA} = \frac{CD}{CB} = \frac{DE}{AB}$$

On a simplement inversé tous les numérateurs et tous les dénominateurs. Ainsi, les numérateurs sont toujours les côtés d'UN SEUL triangle, les dénominateurs sont les côtés de l'autre triangle.

Maintenant, quel côté va avec quel côté ?
Et bien c'est assez simple, pour la première configuration, ce sont les côtés « superposés » qui sont dans la même fraction, et les côtés parallèles sont également dans la même fraction.
Pour la deuxième configuration ce sot les côtés « l'un en face de l'autre » qui sont dans la même fraction, ainsi que les côtés parallèles. Avec ces schémas cela devrait être encore plus clair :



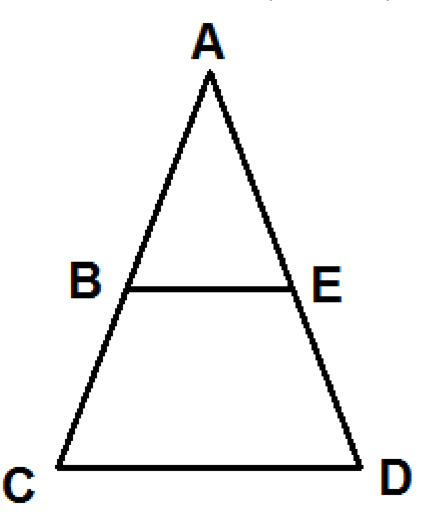


Evidemment comme on l'a vu précédemment on peut inverser les numérateurs et dénominateurs (à condition de TOUS les inverser !!)

—

ATTENTION !!! Une erreur très souvent commise est de mettre dans les fractions une longueur qui n'est pas le côté d'un triangle.

Prenons ce schéma par exemple :



Dans ce schéma, la longueur BC, tout comme la longueur DE, ne correspondent pas à un côté d'un triangle, donc ces longueurs n'ont rien à faire dans les fractions !!

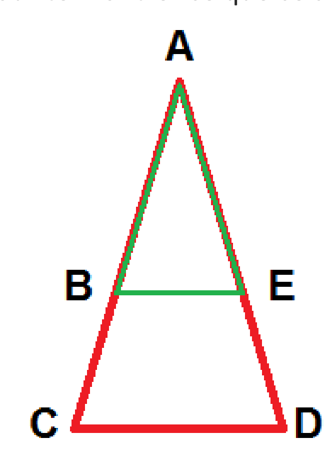
Il faut bien penser que les longueurs dans les fractions correspondent aux côtés des triangles.

On verra plus loin que l'on peut toutefois faire apparaître ces longueurs si jamais on veut les calculer.

—

—

Petite astuce : si tu as bien écris la double égalité, tu devrais retrouver au numérateur les côtés d'un triangle, et au dénominateur les côtés de l'autre triangle. Nous avons l'exemple ci-dessous en couleur pour te montrer ce que cela donne :



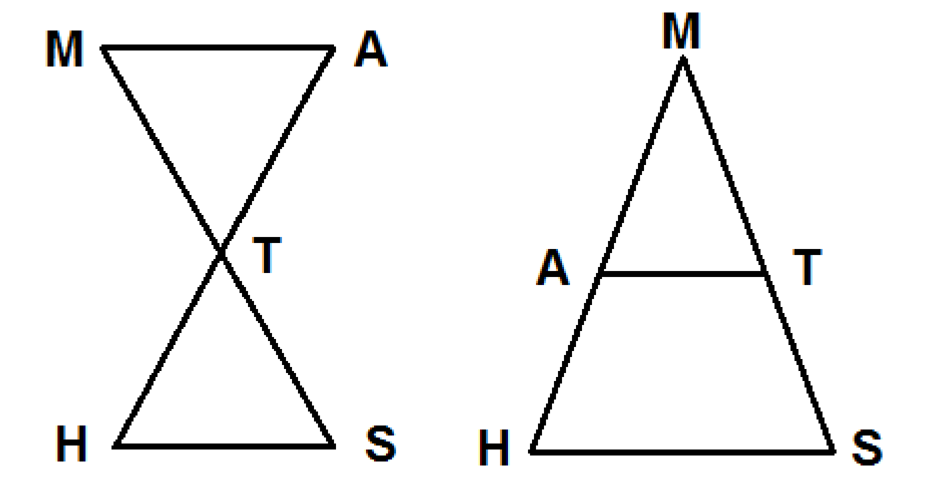
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{BE}{CD}$$

côtés du triangle vert (numérateurs)

côtés du triangle rouge (dénominateurs)

—

Pour t'entraîner, essaye de trouver tout seul les doubles égalités correspondant aux schémas suivants :



Réponse :

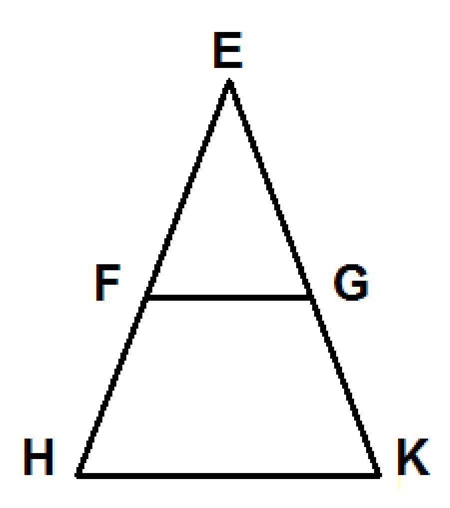
$$\frac{TM}{TS} = \frac{TA}{TH} = \frac{AM}{HS}$$

pour le schéma de gauche

$$\frac{MA}{MH} = \frac{MT}{MS} = \frac{AT}{HS}$$

pour le schéma de droite

Avant de passer aux application, voyons un exemple avec la rédaction complète.
Énoncé : dans la figure ci-dessous, les droites (FG) et (HK) sont parallèles. Donner les égalités résultant du théorème de Thalès.



Réponse : on sait que les droites (FG) et (HK) sont parallèles. De plus, les points E, F, H et E, G, K sont alignés dans cet ordre.
Donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{EF}{EH} = \frac{EG}{EK} = \frac{FG}{HK}$$

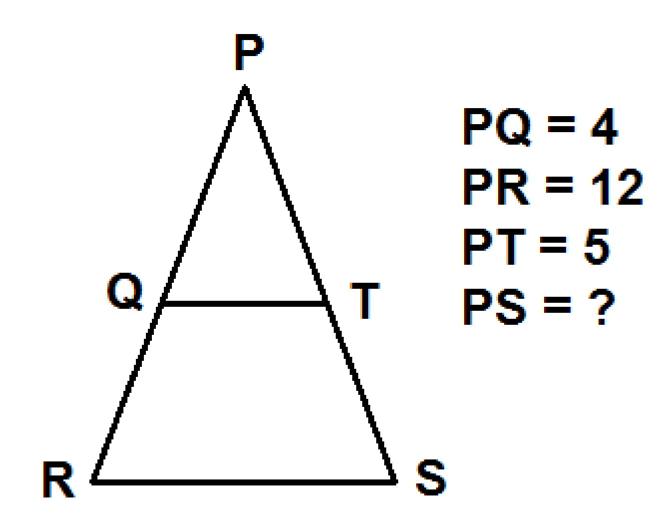
Comme tu le vois rien de bien compliqué, on suit le principe Hypothèses – Théorème – Conclusion.

Bon c'est bien joli tout ça mais à quoi ça sert ??
Et bien c'est justement ce que nous allons voir !

Applications du théorème

Haut de page
Tout comme le théorème de Pythagore, celui de Thalès va nous permettre de calculer des longueurs. Il y a cependant quelques différences puisqu'on nous avons une double égalité dans le théorème de Thalès.

Après avoir appliqué le théorème comme on l'a vu dans la partie précédente, il va falloir choisir quelle égalité on va utiliser.
Prenons un exemple : dans la figure ci-dessous, on sait que (QT) et (RS) sont parallèles. On donne également les longueurs comme indiqué sur la figure. Calculer PS.



Pour cet exemple, on ne va pas rédiger le début du théorème pour se focaliser sur la suite. Le théorème de Thalès nous permet d'écrire que :

$$\frac{PQ}{PR}=\frac{PT}{PS}=\frac{QT}{RS}$$

Maintenant il s’agit de choisir deux des trois fractions.
On cherche à calculer PS, donc va prendre PT/PS. De plus on connaît PQ et PR, donc on va prendre PQ/PR.
On va donc réécrire l’égalité en ne gardant que les deux fractions sélectionnées :

$$\frac{PQ}{PR}=\frac{PT}{PS}$$

Ainsi on n’écrit pas la fraction que l’on a « écartée », ici QT/RS. On a écarté cette fraction car on ne connaît aucune des 2 longueurs, et ce que l’on cherche, ici PS, n’est pas dans la fraction QT/RS.
On s’intéresse donc à :

$$\frac{PQ}{PR}=\frac{PT}{PS}$$

On peut remplacer tout de suite par les longueurs que l’on connaît mais ce n’est pas terrible, il vaut mieux d’abord ISOLER ce que l’on recherche, à savoir PS.
Ainsi :

$$PS=\frac{PT\times PR}{PQ}$$

Et seulement maintenant on remplace par les chiffres :

$$PS=\frac{5\times 12}{4}$$

$$PS=5\times 3$$

$$PS=15$$

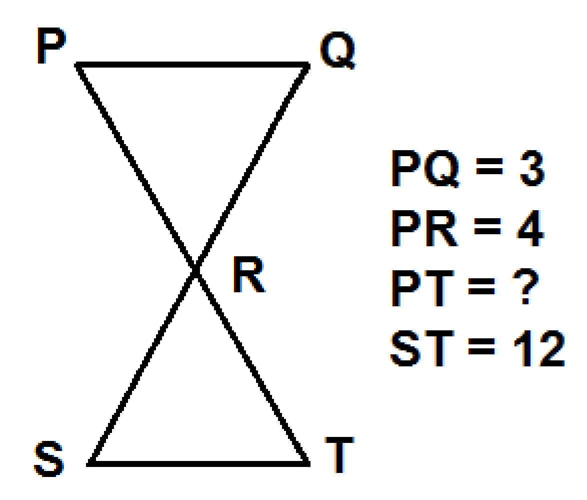
Et voilà, on a trouvé ce que l’on cherchait !

Remarque : dans le calcul, pense d'abord à SIMPLIFIER avant de calculer comme on l'a fait, ici le 12 et le 4

Pour résumer, les étapes sont les suivantes :
– on applique le théorème comme vu dans le partie précédente
– on sélectionne deux fractions (une que l'on sait calculer, l'autre qui contient ce que l'on cherche à calculer)
– on écrit l'égalité entre ces deux fractions
– on isole ce que l'on cherche
– on remplace par les valeurs et on calcule (en simplifiant d'abord !)

Cela peut te paraître compliqué mais une fois que tu auras fait plein d'exercices cela te semblera très simple !

Entraînons-nous sur un deuxième exemple qui comporte une petite étape supplémentaire.
On sait que (PQ) et (ST) sont parallèles. Calculer PT.



Comme dans l'exemple précédent on va sauter la rédaction du théorème (mais sur ta copie tu devras le faire !). Cela nous donne :

$$\frac{RP}{RT} = \frac{RQ}{RS} = \frac{PQ}{ST}$$

Prochaine étape : on sélectionne deux fractions. Comme on connaît PQ et ST, on prend PQ/ST.
De plus, on cherche PT, sauf que PT n'apparaît pas dans les fractions !!!
Mais il est assez évident de voir que PT est caché dans RP/RT et non dans RQ/RS, car P, R et T sont alignés. On va donc prendre RP/RT.

On réécrit donc l'égalité avec les deux fractions sélectionnées :

$$\frac{RP}{RT} = \frac{PQ}{ST}$$

Oui mais maintenant, qu'est-ce qu'on isole vu que l'on cherche PT mais qu'il n'y a pas PT dans l'égalité ???
Et bien on isole la longueur que l'on ne connaît pas !
Ici on connaît RP, PQ et ST, donc on isole RT vu qu'on ne connaît pas cette longueur.

$$RT = \frac{RP \times ST}{PQ}$$

$$RT = \frac{4 \times 12}{3}$$

$$RT = 4 \times 4$$

$$RT = 16$$

Bon c'est très bien tout ça mais on a toujours pas ce que l'on veut à savoir PT.
Il y a donc une dernière étape, calculer PT, puisque l'on connaît RT et RP :
PT = PR + RT car R appartient au segment [PT]
PT = 4 + 16
PT = 20

Et voilà tout simplement !

Ici la petite différence avec l'exemple précédent c'est que la longueur que l'on doit trouver n'apparaît pas dans les fractions. Pas de panique, il suffit de voir dans quel fraction se « cache » ce que l'on cherche et de la sélectionner. Et on isole la longueur que l'on ne connaît pas avant de calculer celle que l'on cherche.
Encore une fois seul l'entraînement te permettra de trouver tout cela très simple ! 

Maintenant que l'on a vu le théorème de Thalès et à quoi il sert, passons à la réciproque.

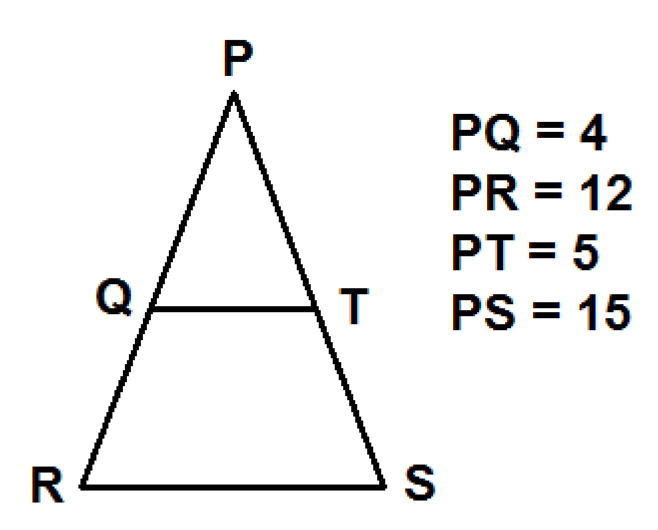
Réciproque du théorème

Pour la réciproque, le principe va être le même que pour la réciproque de Pythagore, c'est-à-dire que l'on va montrer que l'égalité est vraie, et on va en conclure que les droites sont parallèles.

La petite différence, c'est que l'on a vu que pour le théorème de Thalès il y avait une double égalité.
Pas de problème, car pour la réciproque il suffit de montrer qu'une seule égalité est vraie 

Concrètement, on va calculer SÉPARÉMENT deux des trois fractions, et on va dire qu'elles sont égales.
On en déduira alors que les droites sont parallèles.
Tout comme pour le théorème, il faudra dire que les points sont alignés dans cet ordre, et bien sûr dire « d'après la réciproque du théorème de Thalès ».

Voyons un petit exemple, ce sera encore plus clair.
Sur la figure suivante, on connaît certaines longueurs qui sont données dans l'énoncé. Le but est de montrer que les droites (QT) et (RS) sont parallèles :



On a le choix entre trois fractions : PQ/PR, PT/PS et QT/RS.
On connaît PQ et PR, ainsi que PT et on cherche PS.
Les deux rapports que l'on va calculer sont donc évidemment PQ/PR et PT/PS, surtout qu'on ne connaît ni QT ni RS.
Voici donc la réponse telle que tu devrais la rédiger (on a mis les fractions avec un / mais évidemment tu dois faire de vraies fractions^^)

PQ/PR = 4/12 et PT/PS = 5/15
PQ/PR = 1/3 et PT/PS = 1/3

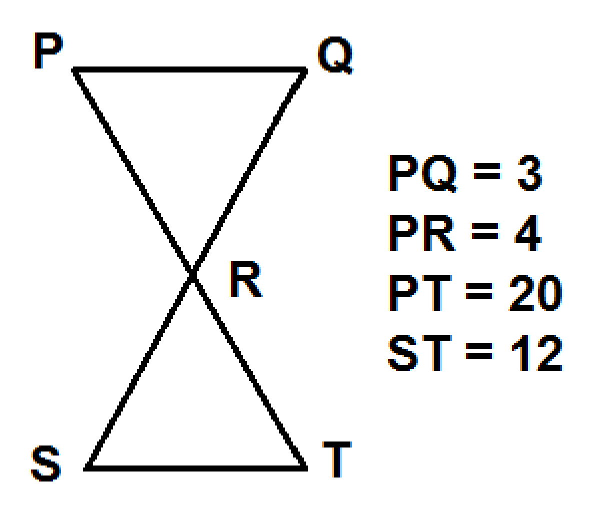
Donc PQ/PR = PT/PS
De plus, les points P, Q, R et P, T, S sont alignés dans cet ordre.

Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (QT) et (RS) sont parallèles.

Et voilà, rien de plus !

—
ATTENTION ! Tout comme pour la réciproque de Pythagore, on calcule SÉPARÉMENT les deux fractions, on ne dit pas tout de suite qu'elles sont égales car on ne le sait pas, on doit le prouver justement !
—

Un autre exemple avec une petite subtilité :



Ici il faut montrer que (PQ) et (ST) sont parallèles.
On va calculer évidemment RT/RP et ST/PQ.
Le problème est que l'on ne connaît pas RT… mais on peut le calculer !
On va ainsi d'abord calculer RT avant de passer à la suite :
RT = PT – PR car R appartient au segment [PT]
RT = 20 – 4
RT = 16

Maintenant que l'on connaît toutes les longueurs que l'on souhaite on peut passer au calcul :
RT/RP = 16/4 et ST/PQ = 12/3
RT/RP = 4 et ST/PQ = 4

Donc RT/RP = ST/PQ
De plus, les points P, R, T et Q, R, S sont alignés dans cet ordre.
Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (PQ) et (ST) sont parallèles.

Rien de bien méchant par rapport à l'exemple précédent, si ce n'est qu'il faut d'abord calculer la longueur que l'on ne connaît pas.

—
Avant de passer à la suite faisons une petite remarque : il n'y a besoin de montrer l'égalité qu'entre deux des trois fractions pour pouvoir appliquer la réciproque du théorème et en conclure que les droites sont parallèles.
Mais comme les droites sont parallèles on peut maintenant appliquer le théorème et dire l'égalité entre les TROIS fractions. Ainsi, la troisième fraction que l'on n'a pas calculée est égale aux deux premières !
Sur l'exemple juste avant, on avait montré que RT/RP = ST/PQ = 4.
Après avoir énoncé la réciproque du théorème de Thalès et dit que (PQ) et (ST) sont parallèles, on peut ajouter que la troisième fraction, à savoir RS/RQ, est aussi égale aux deux autres fractions, donc que RS/RQ = 4.
—

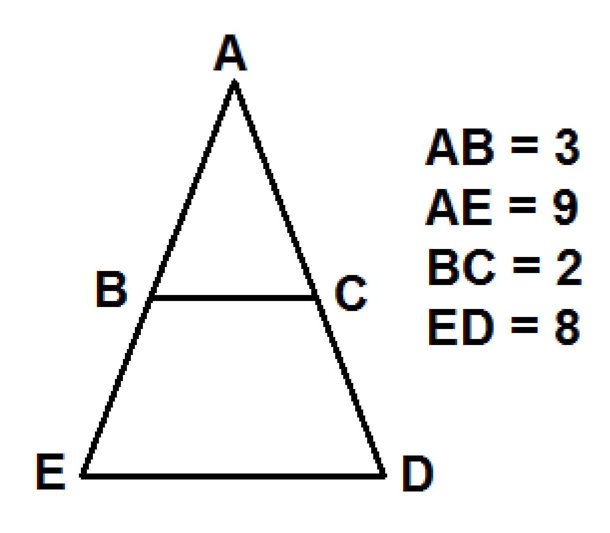
Il peut arriver que les fractions que l'on calcule ne soient pas égales, que se passe-t-il dans ce cas ??
Et bien les droites ne sont pas parallèles ! Mais ça c'est la contraposée que l'on va voir tout de suite.

Contraposée du théorème

La contraposée du théorème de Thalès fonctionne sur le même principe que celle du théorème de Pythagore : si l'égalité n'est pas vérifiée, les droites ne sont pas parallèles (pour Pythagore, si l'égalité n'est pas vérifiée le triangle n'est pas rectangle).

Pour la rédaction aussi cela fonctionne sur le même principe : on commence par calculer SÉPARÉMENT les rapports. Puis on voit qu'ils ne sont pas égaux, et on conclut avec la contraposée que les droites ne sont pas parallèles.
Ici pas besoin de dire que les points sont alignés dans cet ordre 🙂

Voyons un exemple !
Dans le schéma suivant, les droites (BC) et (DE) sont-elles parallèles ?



AB/AE = 3/9 et BC/ED = 2/8
AB/AE = 1/3 et BC/ED = 1/4

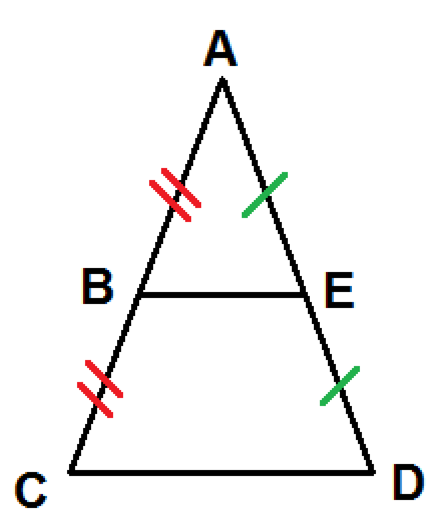
Donc AB/AE ≠ BC/ED
Donc d'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (BC) et (ED) ne sont pas parallèles.

La rédaction est donc presque la même que pour la réciproque, si ce n'est que les fractions ne sont pas égales donc les droites ne sont pas parallèles !

Cas particuliers : les théorèmes des milieux

On dira parfois Le théorème des milieux ou LES théorèmes des milieux car en fait cela regroupe plusieurs théorèmes qui ont le même nom.
On écrira donc le théorème quand on parle d'un théorème précis, et les théorèmes quand on parle en général.

Les théorèmes des milieux s'appliquent dans une configuration bien précise. En effet, ces théorèmes ne s'appliquent que dans la première configuration, quand les deux triangles sont l'un dans l'autre, mais pas dans la configuration en papillon.
De plus, il faut que la droite passe par le milieu des deux côtés comme sur le schéma suivant :



Comme indiqué sur le schéma, B est le milieu de [AC] et E le milieu de [AD]. Ce pourquoi cela s'appelle le théorème des milieux

Mais que nous dit ce théorème ? Et bien tout simplement que les droites (BE) et (CD) sont… parallèles ! Tout comme le théorème de Thalès…
Sauf que dans ce cas, la rédaction est beaucoup plus simple, il suffit de dire :
B est le milieu de [AC] et E le milieu de [AD], donc d'après le théorème des milieux, les droites (BE) et (CD) sont parallèles.

De plus, le théorème des milieux nous dit également que BE = CD/2 (ou CD = 2 BE).

Mais d'où viennent tous ces théorèmes ?
Tout simplement du théorème de Thalès !

En effet, si B est le milieu de [AC] par exemple, AB/AC = 1/2 (car AC = 2 AB).
De la même manière, E le milieu de [AD] signifie que AE/AD = 1/2.
Ainsi, AB/AC = AE/AD, donc d'après le théorème de Thalès, (BE) et (CD) sont parallèles.

En fait, si les points sont au milieu des segments, les fractions que l'on va calculer seront toujours égales à 1/2 (ou 2 si on prend la fraction inverse), et ce quelle que soit les longueurs de chaque côté.
Ainsi, le fait de dire que les points sont au milieu revient à dire que les rapport valent 1/2, donc sont égaux, et on peut donc appliquer le théorème de Thalès.
Ainsi on sait d'après la réciproque que la troisième fraction est égale aux deux autres, à savoir 1/2, ici BE/CD = 1/2.
Cela revient à dire que BE = CD/2 (ou CD = 2 BE) dans le cadre de l'exemple ci-dessus.

—

Remarque : contrairement au théorème de Thalès, pas besoin de dire que les points sont alignés dans un ordre particulier (cela est sous-entendu quand on dit que les points sont au milieu des segments)

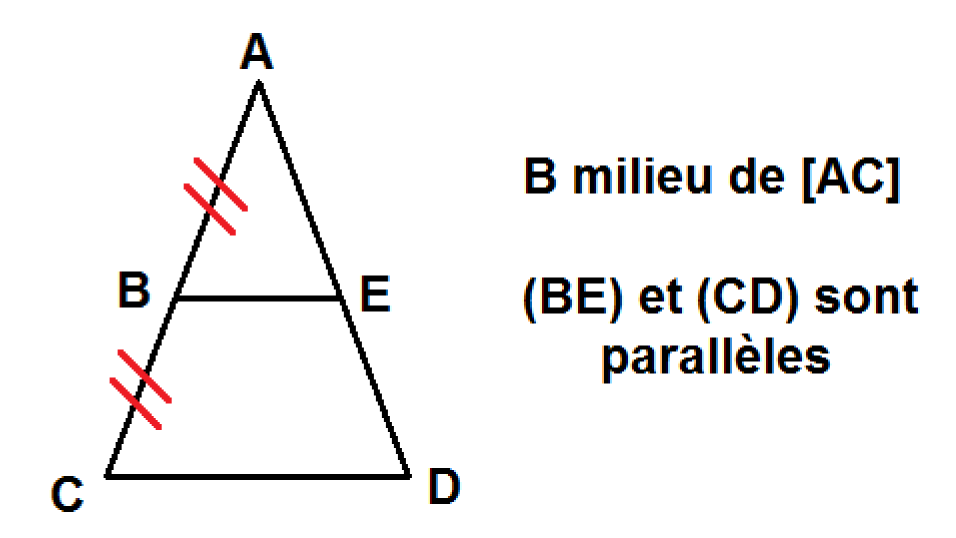
—

—

Tu as peut-être remarqué que le théorème des milieux regroupe en fait le théorème de Thalès et sa réciproque dans la configuration particulière. Ainsi quand on dit « le » théorème des milieux cela est assez générique. Surtout qu'il existe encore une autre version de ce théorème !

—

En effet, il existe une autre version du théorème qui mélange un peu les hypothèses, mais qui s'appelle toujours théorème des milieux (on peut dire que c'est une autre version du théorème).
En fait, comme pour la réciproque du théorème de Thalès, on sait que les droites sont parallèles, mais on sait en plus que la droite passe par le milieu d'un des deux côtés comme sur le schéma suivant :



Le théorème des milieux nous dit (BE) passe par le milieu de [AD], donc que E est le milieu de [AD] !

En effet, les droites étant parallèles, on peut appliquer la réciproque du théorème de Thalès, qui nous dit que :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$$

Or B milieu de [AC], donc AB/AC = 1/2 :

$$\frac{1}{2} = \frac{AE}{AD}$$

$$AD = 2AE$$

Cela revient à dire que E est le milieu de [AD] !

Comme tu le vois encore une fois ce n'est qu'une application du théorème de Thalès (ici plutôt sa réciproque), mais qui ne nécessite pas de calcul et est beaucoup plus rapide à rédiger. Mais rien ne t'empêche de faire le théorème de Thalès même si on est dans le cas particulier, mais il faudra rédiger tout proprement comme pour le théorème de Thalès classique 😉